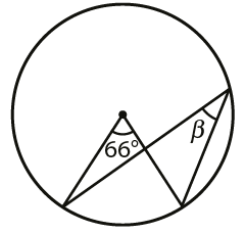


10.1

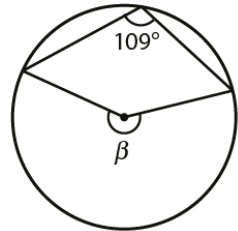
- a) Kulma β on kehäkulma ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on 66° . Lasketaan kulman β suuruus.



$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 66^\circ = 33^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

- b) Kulma β on keskuskulma ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 109° . Lasketaan keskuskulman β suuruus.



$$\beta = 2 \cdot 109^\circ = 218^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

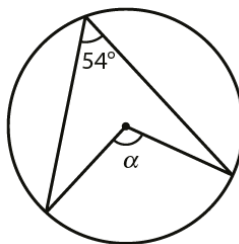
Vastaus

- a) 33°
b) 218°

10.2

a)

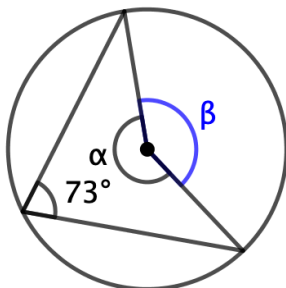
Kulma α on keskuskulma ja samaa kaarta vastaavan kehäkulma on 54° .



$$\alpha = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

b) Täydennetään kuvaa.



Kulma β on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 73° .

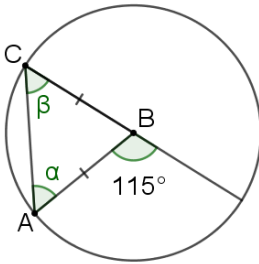
$$\beta = 2 \cdot 73^\circ = 146^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kulmat α ja β muodostavat täysikulman.

$$\alpha = 360^\circ - 146^\circ = 214^\circ.$$

c) Täydennetään kuvaa.



Kulma β on kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on 115° .

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 115^\circ = 57,5^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

Kolmio ABC on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = \beta = 57,5^\circ$.

Vastaus

a) 108°

b) 214°

c) $57,5^\circ$

10.3

Määritetään huoneen halkaisija geometriaohjelmalla.

Piirretään jana AB , jonka pituus on $35,3$ (m).

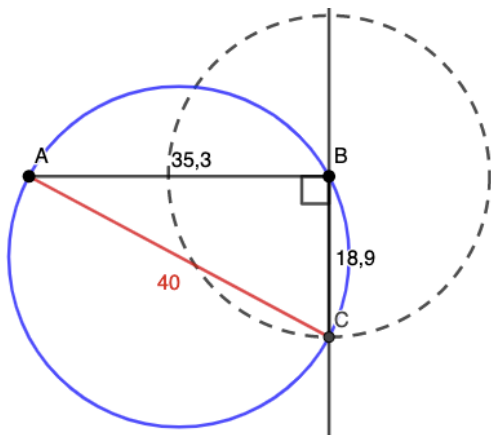
Piirretään pisteeseen B janan normaali ja mitataan siltä etäisyys $18,9$ (m) ympyrän avulla.

Galleriahuonetta kuvaavalta ympyrältä on nyt tiedossa kehäpisteet A , B ja C . Piirretään pisteiden kautta kulkeva ympyrä.

Koska ympyrän kehäkulma B on suorakulma, on kaari ABC puoliympyrä. Pisteet A ja C ovat siis ympyrän halkaisijan päätepisteet.

Mitataan ympyrän halkaisija.

$$AC \approx 40,0 \text{ (m)}$$



Huoneen halkaisija on $40,0$ metriä.

Vastaus

$40,0$ m

10.4

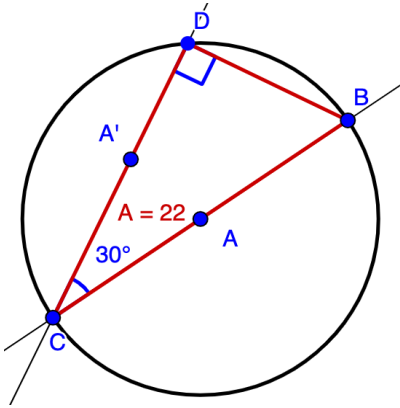
Piirretään ympyrä, jonka säde on 5 (cm). Merkitään ympyrän kehälle piste B . Piirretään suora, jonka kulkee ympyrän keskipisteen ja kehäpisteen kautta. Merkitään suoran ja ympyrän toinen leikkauspiste C . Jana CB on ympyrän halkaisijan ja samalla yksi kolmion sivuista.

Piirretään pisteeseen C kulma, jonka koko on 30° .

Piirretään suora leikkauspisteen ja kulman piirtämisessä syntyneen pisteen A' kautta. Merkitään suoran ja ympyrän leikkauspiste D .

Piirretään kolmio pisteiden B , C ja D kautta. Mitataan kolmion pinta-ala.

Kolmion pinta-ala on $22 \text{ (cm}^2\text{)}$.



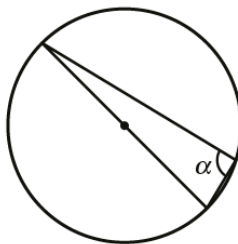
Vastaus

 22 cm^2

10.5

- a) Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.

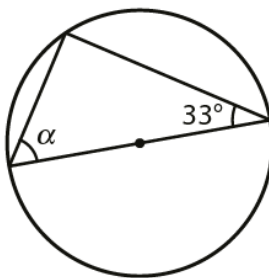
$$\alpha = 90^\circ$$



90°

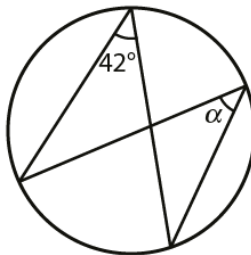
- b) Kolmion kulmien summa on 180° , ja puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suorakulma.

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - 90^\circ - 33^\circ \\ &= 57^\circ\end{aligned}$$



- c) Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

$$\alpha = 42^\circ$$

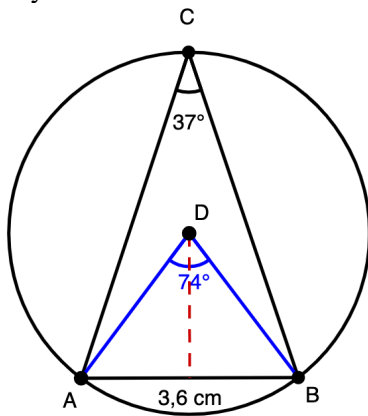


Vastaus

- a)
b) 57°
c) 42°

10.6

Täydennetään kuvaa.



Kulma $\angle ADB$ on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 37° .

$$\angle ADB = 2 \cdot 37^\circ = 74^\circ$$

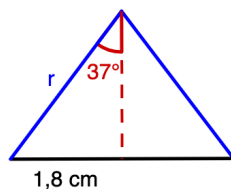
Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan ympyrän säde r .

$$\sin 37^\circ = \frac{1,8}{r}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r \approx 3,0 \text{ (cm)}$$



Vastaus

3,0 cm

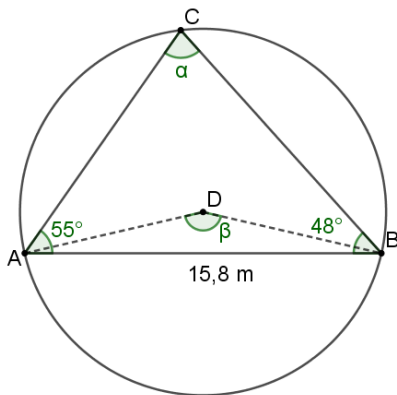
10.7

Piirretään mallikuva.

Kolmion kulmien summa on 180° .

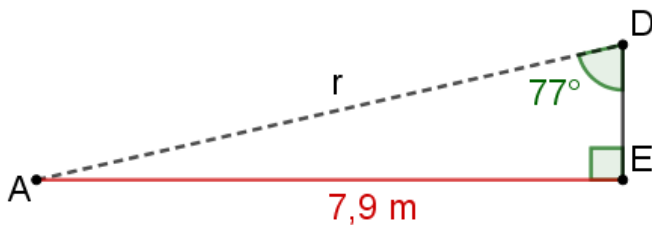
$$\alpha = 180^\circ - 55^\circ - 48^\circ = 77^\circ$$

Kulmat $\alpha = 77^\circ$ on kehäkulma, ja kulma β on samaa kaarta vastaava keskuskulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.



$$\beta = 2 \cdot 77^\circ = 154^\circ$$

Piirretään tasakylkiselle kolmiolle ABD korkeusjana. Korkeusjana puolittaa huippukulman β ja tasakylkisen kolmion kannan.



Ratkaistaan ympyrän säteen r pituus.

$$\sin 77^\circ = \frac{7,9}{r}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

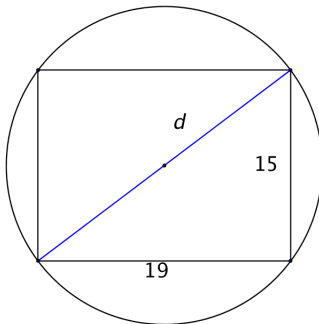
$$r \approx 8,11 \text{ (m)}$$

Vastaus

8,11 m

10.8

Piirretään mallikuva.



Puukiekon halkaisija on suorakulmion lävistäjä. Ratkaistaan halkaisijan pituus Pythagoraan lauseella.

$$19^2 + 15^2 = d^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d \approx -24,207 \text{ tai } d \approx 24,207\dots$$

Halkaisijan pituus on positiivinen luku, joten $d \approx 24,207$ cm.

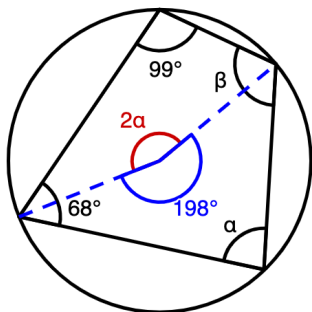
Puukiekon säde oli $\frac{24,207 \text{ cm}}{2} \approx 12,1$ cm.

Vastaus

12,1 cm

10.9

Täydennetään kuvaa.



Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kehäkulmaa α vastaava keskuskulma on 2α .

Kehäkulmaa 99° vastaava keskuskulma on $2 \cdot 99^\circ = 198^\circ$.

Kulmat 2α ja 198° muodostavat täysikulman.

$$2\alpha + 198^\circ = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 81^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on 360° .

$$\beta + 99^\circ + 68^\circ + 81^\circ = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\beta = 112^\circ$$

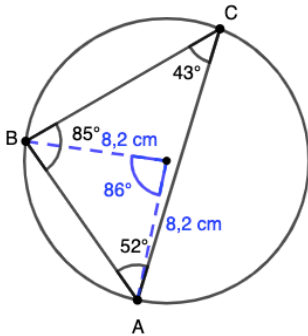
Vastaus

$$\alpha = 81^\circ, \beta = 112^\circ$$

10.10

Täydennetään kuvaa. Sivun BC vastainen kulma on $180^\circ - 85^\circ - 43^\circ = 52^\circ$.

Sivu AB :



Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma eli $2 \cdot 43^\circ = 86^\circ$. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman 86° ja kannan AB .

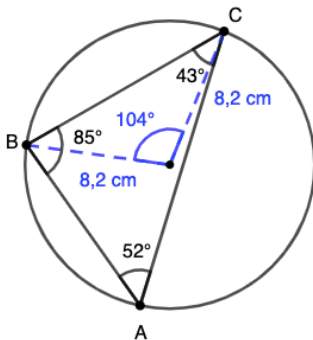
Lasketaan kannan puolikkaan x pituus.

$$\sin 43^\circ = \frac{x}{8,2}$$

$$x \approx 5,592 \text{ (cm)}$$

Sivun AB pituus on $2 \cdot 5,592 \text{ cm} \approx 11,2 \text{ cm}$

Sivu BC :



Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma eli $2 \cdot 52^\circ = 104^\circ$. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman 104° ja kannan BC .

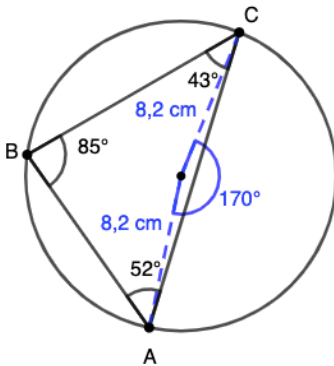
Lasketaan kannan puolikkaan y pituus.

$$\sin 52^\circ = \frac{y}{8,2}$$

$$y \approx 6,462 \text{ (cm)}$$

Sivun BC pituus on $2 \cdot 6,462 \text{ cm} \approx 12,9 \text{ cm}$

Sivu AC



Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma eli $2 \cdot 85^\circ = 170^\circ$. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman 170° ja kannan AC .

Lasketaan kanna puolikkaan pituus z .

$$\sin 85^\circ = \frac{z}{8,2}$$

$$z \approx 8,169 \text{ (cm)}$$

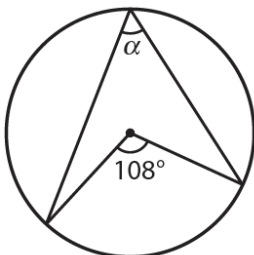
Sivun AC pituus on $2 \cdot 8,169 \text{ cm} \approx 16,3 \text{ cm}$

Vastaus

$AB = 11,2 \text{ cm}$, $AC = 16,3 \text{ cm}$ ja $BC = 12,9 \text{ cm}$

10.11

a)

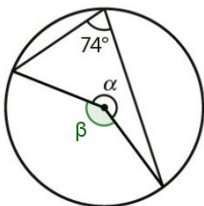


Kulma α on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on 108° .

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

b) Täydennetään kuvaa.



Kulma β on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on 74° .

$$\alpha = 2 \cdot 74^\circ = 148^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kulmat α ja β muodostavat täysikulman.

$$\alpha = 360^\circ - 148^\circ = 212^\circ$$

Vastaus

a) 54°

b) 212°

10.12

Piirretään ruohonleikkurin reitti käänteisessä järjestyksessä.

Piirretään jana AB , jonka pituus on 41,2 (m).

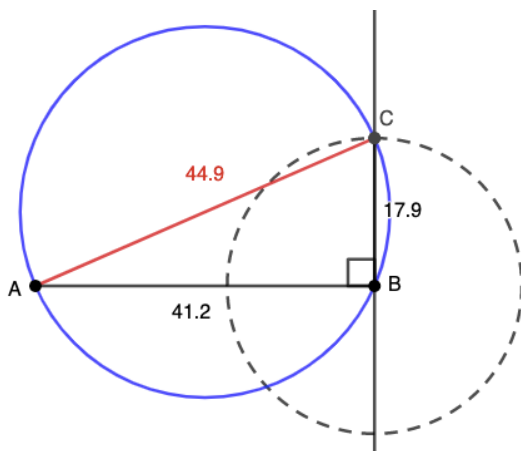
Piirretään pisteeseen B janan normaali ja mitataan siltä etäisyys 17,9 (m) ympyrän avulla.

Nurmikkoa kuvaavalta ympyrältä on nyt tiedossa kehäpisteet A , B ja C . Piirretään pisteiden kautta kulkeva ympyrä.

Koska ympyrän kehäkulma B on suorakulma, on kaari ABC puoliympyrä. Pisteet A ja C ovat siis ympyrän halkaisijan päätepisteet.

Mitataan ympyrän halkaisija.

$$AC \approx 44,9 \text{ (m)}$$



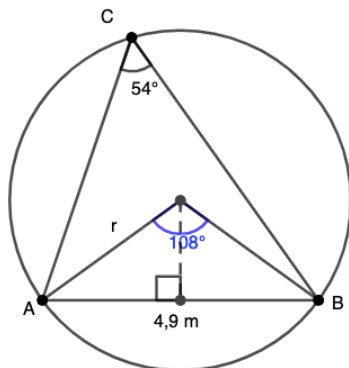
Nurmikon halkaisija on 44,9 metriä.

Vastaus

44,9 m

10.13

Piirretään mallikuva.



Samaa kaarta vastaava keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

$$2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kulman 108° ja kannan.

Syntyvän suorakulmaisen kolmion yksi terävä kulma on $\frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$ ja

kulman vastainen kateetti $\frac{4,9 \text{ m}}{2} = 2,45 \text{ m}$

Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta ympyrän säteen pituus r .

$$\sin 54^\circ = \frac{2,45}{r} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r \approx 3,0 \text{ (m)}$$

Vastaus

3,0 m

10.14

- a) Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.

$$\alpha = 32^\circ$$

Merkitään mallikuvaan kulmat γ ja δ .

Kulma 32° on kehäkulma, ja kulma δ on samaa kaarta vastaava keskuskulma. Kulma β on kehäkulma, ja kulma γ on samaa kaarta vastaava keskuskulma.

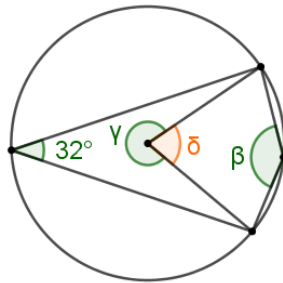
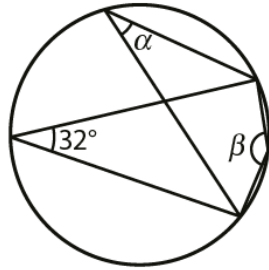
Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma.
 $\delta = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$

Kulmat γ ja δ muodostavat täysikulman.

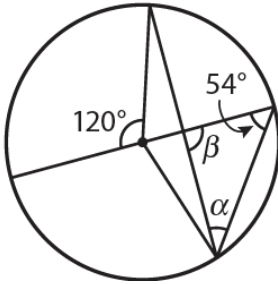
$$\gamma = 360^\circ - \delta = 296^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

$$\beta = \frac{296^\circ}{2} = 148^\circ$$



b)



Kulma α on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta, joten $\alpha = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Kolmion kulmien summa on 180° . Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - 30^\circ - 54^\circ = 96^\circ$$

Vastaus

a) $\alpha = 32^\circ, \beta = 148^\circ$

b) $\alpha = 30^\circ, \beta = 96^\circ$

10.15

Kolmion hypotenuusa on ympyrän halkaisija.

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

Ratkaistaan sivun a pituus.

$$\cos 72^\circ = \frac{a}{6,0}$$

$$a = 6,0 \cdot \cos 72^\circ$$

$$a \approx 1,854 \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan sivun b pituus.

$$\sin 72^\circ = \frac{b}{6,0}$$

$$b \approx 5,706 \text{ (cm)}$$

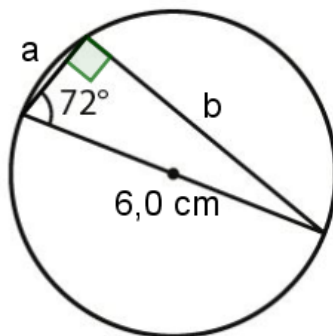
Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1,854 \cdot 5,706$$

$$\approx 5,3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

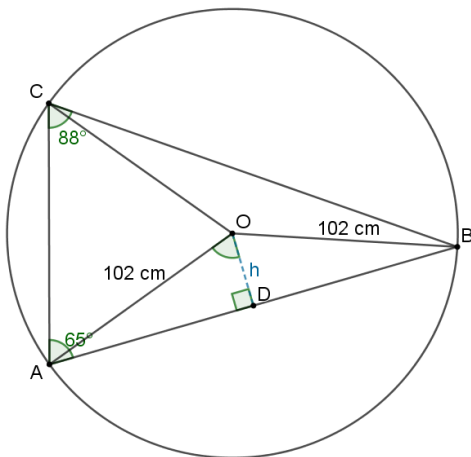
Vastaus

5,3 cm²



10.16

Sivu *AB*:



Kulma ACB on kehäkulma, ja kulma AOB samaa kaarta vastaava keskuskulma. Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma eli kulma $AOB = 2 \cdot 88^\circ = 172^\circ$.

Tasakylkisen kolmion ABO korkeusjana puolittaa kulman AOB ja kannan AB . Kulma $AOB = \frac{172^\circ}{2} = 88^\circ$

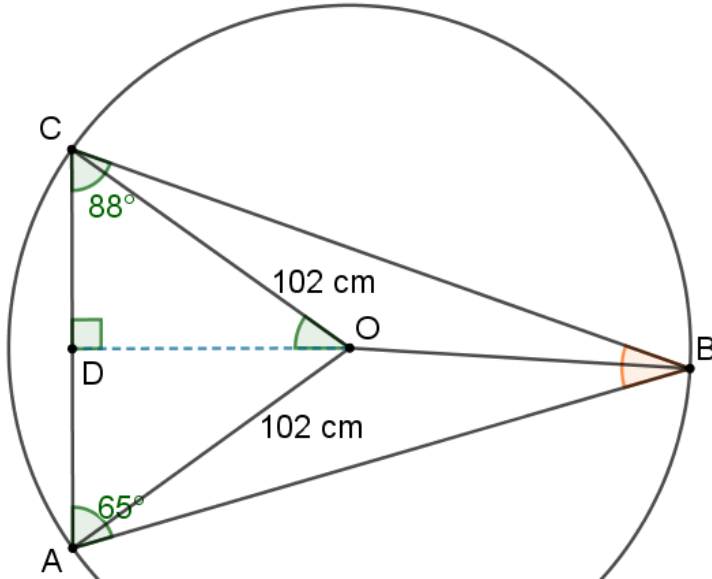
Ratkaistaan janan AD pituus.

$$\sin 88^\circ = \frac{AD}{102}$$

$$AD \approx 101,938 \text{ (cm)}$$

Sivun AB pituus on siis $2 \cdot 101,938 \text{ cm} \approx 204 \text{ cm}$.

Sivu AC:



Lasketaan kulman CAB suuruus.

$$180^\circ - 88^\circ - 65^\circ = 27^\circ$$

Kulma CBA on kehäkulma, ja kulma COA samaa kaarta vastaava keskuskulma. Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma eli kulma $COA = 2 \cdot 27^\circ = 54^\circ$.

Tasakylkisen kolmion AOC korkeusjana puolittaa kulman COA ja kannan AC . Kulma $COA = \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ$

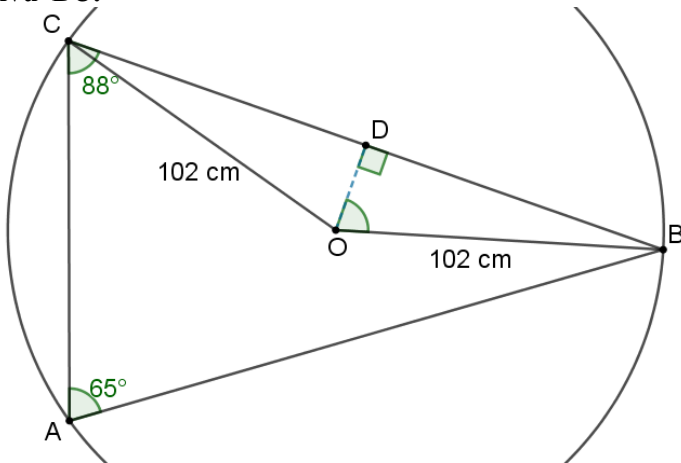
Ratkaistaan janan CD pituus.

$$\sin 27^\circ = \frac{CD}{102}$$

$$CD \approx 46,307 \text{ (cm)}$$

Sivun AC pituus on siis $2 \cdot 46,307 \text{ cm} \approx 93 \text{ cm}$.

Sivu *BC*:



Kulma *BAC* on kehäkulma, ja kulma *BOC* samaa kaarta vastaava keskuskulma. Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma eli kulma $BOC = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$.

Tasakylkisen kolmion *COB* korkeusjana puolittaa kulman *BOC* ja kannan *BC*. Kulma $BOC = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$

Ratkaistaan janan *BD* pituus.

$$\sin 65^\circ = \frac{BD}{102}$$

$$BD \approx 92,443 \text{ (cm)}$$

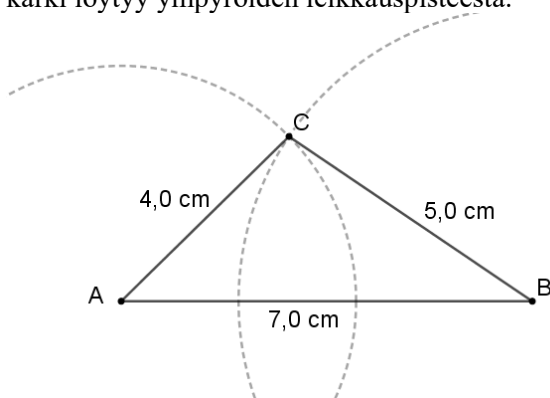
Sivun *BC* pituus on siis $2 \cdot 92,443 \text{ cm} \approx 185 \text{ cm}$.

Vastaus

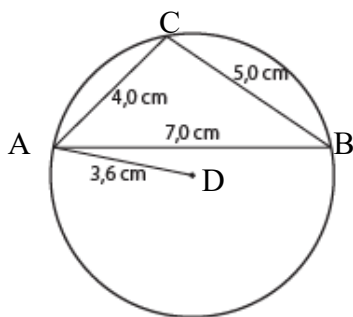
$AB \approx 204 \text{ cm}$, $BC \approx 185 \text{ cm}$ ja $AC \approx 93 \text{ cm}$

10.17

- a) Piirretään jana, jonka pituus on $7,0$ (cm) ja sen päätepisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat $4,0$ (cm) ja $5,0$ (cm). Kolmion kolmas kärki löytyy ympyröiden leikkauspisteestä.



Piirretään ympyrä kolmen pisteen kautta. Merkitään ympyrän keskipiste D . Piirretään jana keskipisteestä esimerkiksi pisteeseen A . Mitataan janan AD pituus.

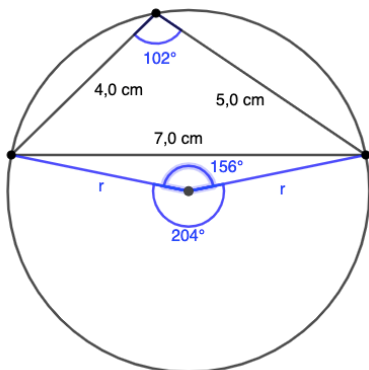


$$AD \approx 3,6 \text{ (cm)}$$

Ympyrän säteen pituus on $3,6$ cm.

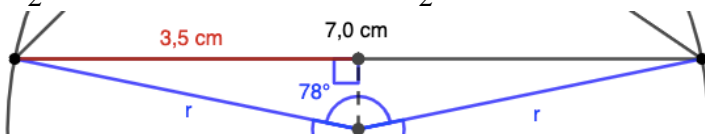
- b) Piirretään mallikuva. Kolmion suurin kulma 102° on kehäkulma, ja sitä vastaava keskuskulma on 204° .

Ympyrän säteet ja kolmion pisin sivu muodostavat tasakylkisen kolmion, jonka huippukulma on $360^\circ - 204^\circ = 156^\circ$.



Kolmion huippukulmasta piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan. Muodostuu suorakulmainen kolmion, jonka toinen terävä kulma on

$$\frac{156^\circ}{2} = 78^\circ \text{ ja toinen kateetti } \frac{7,0 \text{ cm}}{2} = 3,5 \text{ cm}.$$



Ratkaistaan ympyrän säde suorakulmaisesta kolmiosta.

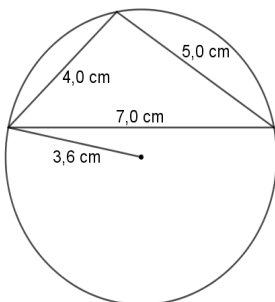
$$\sin 78^\circ = \frac{3,5}{r} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r \approx 3,6 \text{ (cm)}$$

Ympyrän säde on 3,6 cm.

Vastaus

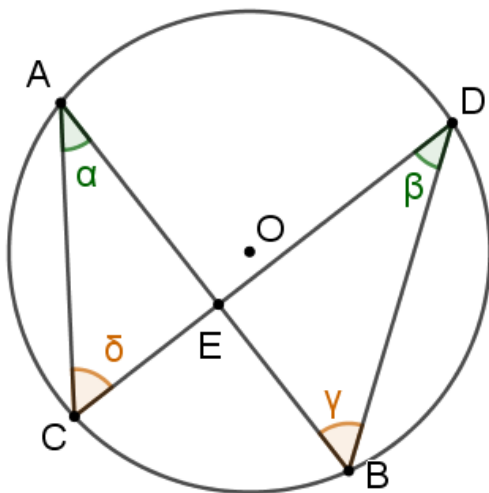
a)



b) 3,6 cm

10.18

Piirretään kuva.



Geometriaohjelman perusteella kolmiot näyttäisivät olevan yhdenmuotoiset.

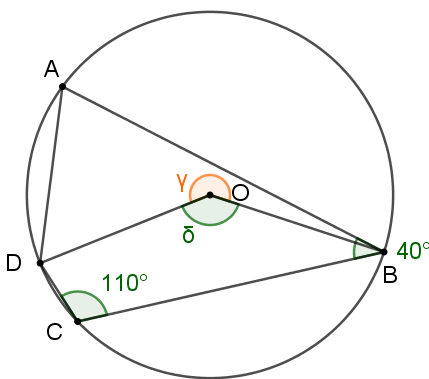
Kulmat α ja β vastaavat samaa kaarta, joten ne ovat yhtä suuret, samoin kulmat γ ja δ . Kolmiot ovat kk-lauseen perusteella yhdenmuotoiset.

Vastaus

Kolmioissa on pareittain kaksi samaa kaarta vastaavaa kehäkulmaa, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

10.19

Piirretään mallikuva.



Kulma BCD on kehäkulma, ja kulma BOD on samaa kaartava vastaava keskuskulma. Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

$$\sphericalangle BOD = 2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$$

Lasketaan kulman DOB suuruus täysikulman avulla.

$$\sphericalangle DOB = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

Kulma DOB on keskuskulma, ja kulma DAB samaa kaarta vastaava kehäkulma. Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

$$\sphericalangle DAB = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on 360° . Lasketaan kulman CDA suuruus.

$$360^\circ - 110^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 140^\circ$$

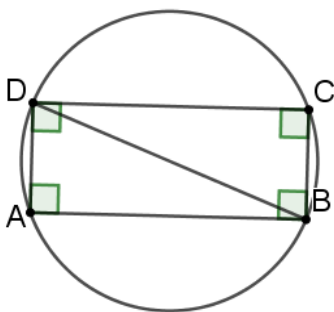
Vastaus

70° ja 140°

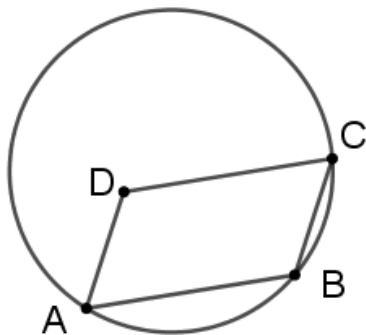
10.20

- a) Näyttäisi sille, että jokaisen suorakulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Suorakulmaisen kolmion ympärille voidaan piirtää ympyrä, jonka halkaisija on kolmion hypotenuusa eli tässä suorakulmion lävistäjä.



- b) Suunnikkaan ympäri ei voida piirtää aina ympyrää. Esimerkiksi:



Vastaus

- a) voidaan
b) ei voida